152

Déterminant. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif tel que $car(\mathbb{K}) \neq 2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 2$.

I] Déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice et d'un endomorphisme

1] Espace des formes n-linéaires alternées

[Rom] XVII.1

Définition 1 : Une forme p-linéaire sur l'espace E est une application $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, et $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!] \setminus \{k\}} \in E^{p-1}$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \varphi(x_1;\dots;x_{k-1};x;x_{k+1};\dots;x_p) \end{array}$ est une forme linéaire sur E. On dit que φ est alternée s'il existe $j \neq k \in [\![1;p]\!]$ tel que $x_j = x_k \Rightarrow \varphi(x_1;\dots;x_p) = 0$.
On note $\mathcal{L}_p(E;\mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E et $\mathcal{A}_p(E;\mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées.

Exemple 2 : Un produit scalaire est une forme bilinéaire.

Proposition 3 : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}_p(E;\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^p.

[Rom]

Théorème 4 : Une forme p-linéaire sur E est alternée ssi pour tout $\sigma \in S_p$, et tout $(x_1;\dots;x_p) \in E^p$, $\varphi(x_{\sigma(1)};\dots;x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1;\dots;x_p)$

Théorème 5 : L'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E;\mathbb{K})$ est de dimension 1 engendré par l'application $\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} E^n \to \mathbb{K} \\ (x_1;\dots;x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \end{array}$ pour $\mathcal{B}$ une base de E et $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$

2] Déterminant d'une famille de vecteurs

[Rom] XVII.2

Définition 6 : Avec les notations précédentes, on dit que $\det_{\mathcal{B}}(x_1;\dots;x_n)$ est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du n-uplet de vecteurs $(x_1;\dots;x_n)$.

[Rom] XVII.2

Proposition 7 : Soit $\mathcal{B} = (e_1;\dots;e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1;\dots;e'_n)$ deux bases de E et $(x_i)_{i=1}^n \in E^n$.
Alors : $\det_{\mathcal{B}'}(x_1;\dots;x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1;\dots;e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1;\dots;x_n)$
$= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1;\dots;x_n)$

Proposition 8 : $(x_i)_{i=1}^n$ est liée ssi pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}((x_i)_{i=1}^n) = 0$
ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq : $\det_{\mathcal{B}}((x_i)_{i=1}^n) = 0$

Corollaire 9 : $(x_i)_{i=1}^n$ est une base de E ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}((x_i)_{i=1}^n) \neq 0$

3] Déterminant d'un endomorphisme

[Rom] XVII.2

Théorème 10 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que pour toute $\varphi \in \mathcal{A}_n(E;\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, et tout $(x_i)_{i=1}^n \in E^n$, on a :
$\varphi(u(x_1);\dots;u(x_n)) = \lambda_u \varphi(x_1;\dots;x_n)$
En particulier, $\lambda_u = \det_{\mathcal{B}}(u(x_1);\dots;u(x_n))$ pour $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.

Définition 11 : Avec les notations précédentes, on dit que λ_u est le déterminant de u et on le note $\det(u)$.

[Rom]

Théorème 12 : Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors : (1) $\det(id) = 1$
(2) $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
(3) $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u)\det(v)$
(4) u est inversible ssi $\det(u) \neq 0$
Dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

Exemples 13 : (1) Le déterminant d'une homothétie de rapport λ est λ^n.
(2) Le déterminant d'une dilatation de rapport λ est λ.
(3) Le déterminant d'une transvection est 1.

4] Déterminant d'une matrice carrée

[Rom] XVII.2

Définition 14 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est le scalaire $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$

XVII.2

Exemple 15 : (1) En dimension $n=2$, on a : $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

(2) En dimension $n=3$, $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec$

[Rom]

Théorème 16 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors : (1) $\det(I_n) = 1$

(2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ et $\det({}^tA) = \det(A)$

(3) $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$

(4) A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Proposition 17 : Si A, B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$

II] Méthodes de calcul du déterminant

1] Mineurs et cofacteurs

XVII.3

Définition 18 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle mineur de A d'indice (i,j) le scalaire $\det(A_{i,j})$ avec $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice déduite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On appelle cofacteur d'indice (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.

Proposition 19 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : (1) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (développement suivant la j-ème colonne)

(2) $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (développement suivant la i-ème ligne)

[Rom]

Définition 20 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La comatrice de A est : la matrice des cofacteurs de A.

$\mathrm{Com}(A) = \left((-1)^{i+j}\det(A_{i,j})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Théorème 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : $A \times {}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A) \times A = \det(A) I_n$

En particulier, si $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$

XVII.3 [Rom]

Remarques 22 : (1) On en déduit que les ~~fonctio~~ coefficients de A^{-1} sont des fonctions rationnelles en les coefficients de A.

(2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $GL_n(\mathbb{K})$.

(3) Numériquement pas très intéressant car requiert $n!$ opérations élémentaires.

2] Matrices triangulaires par blocs

XVII.3 [Rom]

Lemme 23 : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $a_{1,1} \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathcal{M}_{1\times(n-1)}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

Alors : $\det(A) = a_{1,1} \det(B)$

Proposition 24 : Soit $A = (a_{i,j}) \in T_n^{u}(\mathbb{K})$

Alors : $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Lemme 25 : Soit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$

Alors : $\det(A) = \det(B) \cdot \det(D)$

Théorème 26 : Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ avec (A_k) matrices carrées.

Alors : $\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k)$

3] Quelques déterminants usuels et applications

XVII.4.3 [Rom]

Définition 27 : Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$. La matrice de Vandermonde associée à $(x_i)_{i=1}^n$ est $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

Théorème 28 : Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$.

Alors : $\Delta(x_1, \dots, x_n) := \det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

[Isen]

Lemme 29 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Alors : u est nilpotente ssi pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$

Application 30 : (théorème de Burnside) Soit G sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $A \in G$, $A^N = I_n$.

Alors : G est fini

XVII.4.3 [Rom]

Définition 31 : Soit $(y_i)_{i=0}^{p} \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $(x_i)_{i=0}^{p} \in \mathbb{K}^{p+1}$ tels que pour tout $i,j \in [\![1,p]\!]$, $x_j + y_i \neq 0$.

On appelle déterminant de Cauchy : $\det\left(\left(\dfrac{1}{x_j + y_i}\right)_{1 \leq i,j \leq p}\right)$

[Rau] XVII.4.3

Proposition 32 : Soit $(\lambda_i)_{i=0}^{p}, (x_i)_{i=0}^{p}$ comme précédemment.

Alors : $\det\left(\left(\frac{1}{x_j+\lambda_i}\right)_{1\le i,j\le p}\right) = \dfrac{\prod_{0\le i<j\le p}(x_j-x_i)(\lambda_j-\lambda_i)}{\prod_{0\le i,j\le p}(x_j+\lambda_i)}$

[I-sen]

Définition 33 : L'isobarycentre d'un n-uplet $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ est : $g=\frac{z_1+\dots+z_n}{n}$.

Théorème 34 : (du déterminant circulant) Soit $(a_i)_{i=0}^{n-1}\in\mathbb{C}^n$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Alors : $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2}\\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0\end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{jk}$

Application 35 : Soit $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ et P polygône du plan complexe de sommets $z_1,\dots,z_n$. Soit la suite $P_0=P$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, P_{k+1} le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k.

Alors : (P_k) converge vers l'isobarycentre de P

III] Quelques applications du déterminant

1] En algèbre linéaire

XVII.4.2

Définition 36 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X)=\det(X\mathrm{id}-u)$ et celui de A est $\chi_A(X)=\det(XI_n-A)$.

Proposition 37 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors : $\mathrm{Spec}(u)=\chi_u^{-1}\{0\}$ et $\mathrm{Spec}(A)=\chi_A^{-1}\{0\}$

[Rau]

Exemple 38 : Pour $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\chi_A(X)=X^2-\mathrm{Tr}(A)X+\det(A)$

Remarque 39 : Le polynôme caractéristique donne des informations permettant de réduire un endomorphisme.

Exemple 40 : Pour $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$, $\chi_A(X)=(X-1)(X-4)$ d'où $\mathrm{Spec}(A)=\{1;4\}$ et A est alors diagonalisable.

2] En géométrie

XVII.4.4

Proposition 41 : Soit $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E

Alors : la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\in O_n(\mathbb{R})$

Définition 42 : On définit une relation d'équivalence :

$\mathcal{B}\sim\mathcal{B}'$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\in O_n^+(\mathbb{R})$

[Rau]

Proposition 43 : Il y a exactement 2 classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence.

Définition 44 : Orienter l'espace euclidien E revient à choisir une des deux classes d'équivalences pour la relation $\sim$.

Exemple 45 : En choisissant la base canonique comme orientation, $(-e_1;e_2;\dots;e_n)$ est orienté négativement.

3] À la réduction de matrices

[Les]

Théorème 46 : (forme normale de Smith) Soit $\mathbb{A}$ anneau euclidien, $m,n\in\mathbb{N}^*$ et $M\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{A})$

Alors : $\exists P,Q\in GL_m(\mathbb{A})\times GL_n(\mathbb{A})\setminus PMQ=\begin{pmatrix}f_1&&&\\&\ddots&&\\&&f_r&\\&&&0\end{pmatrix}$ avec $f_1,\dots,f_r\in\mathbb{A}$ tels que $f_1|\dots|f_r$, uniques modulo les inversibles de $\mathbb{A}$.

Remarque 47 : La forme normale de Smith permet de retrouver les invariants de similitude d'une matrice et alors de trouver un représentant plus simple de celle-ci dans son orbite par l'action par similitude.

Exemple 48 : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&1&-1\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie - Rombaldi

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre